

### Следящий алгоритм определения угловой ориентации объекта по сигналам спутниковой радионавигационной системы

© Авторы, 2015

© ЗАО «Издательство «Радиотехника», 2015

**А.И. Перов** – д.т.н., проф., зав. кафедрой «Радиотехнические системы», Национальный исследовательский университет «МЭИ»

Проведены синтез оптимального одноэтапного когерентно-некогерентного алгоритма определения угловой ориентации объекта по сигналам спутниковой радионавигационной системы, результаты моделирования, иллюстрирующие эффективность синтезированного алгоритма.

**Ключевые слова:** спутниковые радионавигационные системы, аппаратура потребителей, угловая ориентация, одноэтапный алгоритм.

Synthesis of one-stage coherent-noncoherent algorithm of base line angular attitude estimation using satellite navigation radio signals is performed. Modeling results illustrate efficiency of the synthesized algorithm.

**Keywords:** space radio navigation systems, user apparatus, angular attitude, one-stage algorithm.

Спутниковые радионавигационные системы (СРНС) в настоящее время широко используются для решения различных технических задач, в том числе с извлечением информации из фаз принимаемых сигналов [1]. Одним из таких приложений является определение углов ориентации по сигналам срнс, принимаемых в пространственно разнесенных точках. В [1] описан алгоритм определения угловой ориентации, использующий двухэтапную обработку. На этапе 1 осуществляется слежение за разностью фаз сигналов, принимаемых в пространственно разнесенных точках, а на этапе 2 из измеренных разностей фаз извлекается информация об углах ориентации. При этом для слежения за разностью фаз предложен когерентно-некогерентный алгоритм обработки (см. также [2, 3]), позволяющий повысить помехоустойчивость приема сигналов.

В то же время в [1] показано, что в обычной навигационной аппаратуре перспективным является одноэтапная обработка сигналов, при которой не осуществляется слежение за параметрами сигнала с последующим определением координат объекта, а сразу в едином модуле реализуются алгоритмы непосредственного определения координат объекта. Устройства с одноэтапной обработкой спутниковых радиосигналов позволяют повысить точность определения координат и помехоустойчивость аппаратуры по сравнению с устройствами, построенными на принципе двухэтапной обработки. Идеология одноэтапной обработки для определения ориентации базовой линии описана в [4]. Ниже рассмотрим синтез оптимального одноэтапного когерентно-некогерентного алгоритма оценивания угловой ориентации объекта по сигналам спутниковой радионавигационной системы.

**Постановка задачи синтеза.** Рассмотрим геоцентрическую систему координат  $OXYZ$ , жестко связанную с землей (рис. 1), и треугольник  $ABC$ , задающий базовую плоскость, с которой жестко свяжем систему координат (СК)  $O_cX_cY_cZ_c$ , центр которой  $O_c$  расположен в плоскости  $ABC$ , ось  $O_cX_c$  направлена вдоль линии  $AB$ , ось  $O_cY_c$  лежит в базовой плоскости, ось  $O_cZ_c$  дополняет систему координат до правосторонней.

Ориентация треугольника  $ABC$  в СК  $OXYZ$  определяется углами эйлера  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  или в векторной форме  $\alpha = |\alpha \ \beta \ \gamma|^T$ , которые определяются углами поворота СК  $O_cX_cY_cZ_c$  относительно СК  $OXYZ$ .

Положим, что треугольник  $ABC$  движется в СК  $OXYZ$ , так что вектор углов ориентации меняется во времени, т.е.  $\alpha(t)$ .

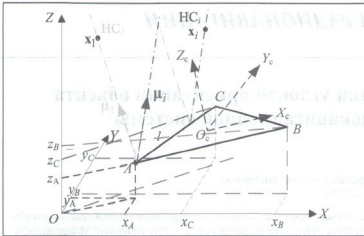


Рис. 1. Геометрическая схема задачи

В точках  $A$ ,  $B$  и  $C$  принимаются радиосигналы от  $n$  навигационных спутников.

Ставится задача: в результате обработки принимаемых радиосигналов синтезировать оптимальную систему фильтрации вектора узлов  $\alpha(t)$ .

Введем направляющие косинусы  $i$ -го НС, определив их, например, относительно точки  $O_c$ , и полагая их одинаковыми и для всех других точек треугольника  $ABC$  (что допустимо при малых размерах треугольника относительно расстояний до НС).

$$\mu_{xi} = \frac{x_i - x_{O_c}}{R_i}, \mu_{yi} = \frac{y_i - y_{O_c}}{R_i}, \mu_{zi} = \frac{z_i - z_{O_c}}{R_i},$$

где  $x_{O_c}$ ,  $y_{O_c}$ ,  $z_{O_c}$  – координаты точки  $O_c$  в СК  $OXYZ$ ;  $R_i$  – дальность до  $i$ -го НС.

Введем единичные векторы  $\mu_{HC,i} = [\mu_{xi} \ \mu_{yi} \ \mu_{zi}]^T$ ,  $i = \overline{1, n}$  в СК  $OXYZ$  и единичные вектора  $\mathbf{1}_{AO_c,c}$ ,  $\mathbf{1}_{BO_c,c}$ ,  $\mathbf{1}_{CO_c,c}$ , задающие направления точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  относительно точки  $O_c$  в СК  $O_c X_c Y_c Z_c$ .

Преобразуем единичные вектора  $\mathbf{1}_{AO_c,c}$ ,  $\mathbf{1}_{BO_c,c}$ ,  $\mathbf{1}_{CO_c,c}$ , заданные в СК  $O_c X_c Y_c Z_c$  в вектора  $\mathbf{1}_{AO_c,3}$ ,  $\mathbf{1}_{BO_c,3}$ ,  $\mathbf{1}_{CO_c,3}$  в СК  $OXYZ$

$$\mathbf{1}_{AO_c,3}(\alpha) = U_c^3(\alpha) \mathbf{1}_{AO_c,c}, \mathbf{1}_{BO_c,3}(\alpha) = U_c^3(\alpha) \mathbf{1}_{BO_c,c}, \mathbf{1}_{CO_c,3}(\alpha) = U_c^3(\alpha) \mathbf{1}_{CO_c,c}, \quad (1)$$

где  $U_c^3$  – матрица преобразования координат из СК  $O_c X_c Y_c Z_c$  в СК  $OXYZ$ , определяемая как

$$U_c^3(\alpha) = \begin{vmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 & \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Рассмотрим спутниковый радиосигнал с кодовым разделением, приходящий от  $i$ -го нс в точку  $O_c$ , для которого запишем выражение

$$s_{0,i}(t) = A h_{\text{нк},i}(t - \tau_{0,i}) \cos((\omega_0 + \omega_{\text{д},i})t + \pi \vartheta_{\text{НС},i} + \varphi_{0,i}), \quad (3)$$

где  $A$  – амплитуда;  $\omega_i$  – несущая частота сигнала;  $\omega_{\text{д},i}$  – доплеровское смещение частоты, обусловленное движением точки  $A$  ( $O_c$ ) треугольника  $ABC$ ;  $\tau_{0,i}$  – задержкагибающей сигнала;  $\varphi_{0,i}$  – постоянная составляющая фазы сигнала, включающая начальную фазу излученного сигнала, задержки сигнала в передающей аппаратуре нс, по трассе распространения и др.;  $h_{\text{нк},i}(t)$  – дальномерный код сигнала;  $\vartheta_{\text{НС},i}$  – навигационные данные, принимающие значение 0 или 1.

В точках  $A$ ,  $B$  и  $C$  принимаемые сигналы сдвинуты по фазе относительно аналогичных сигналов, принимаемый в точке  $O_c$ , на фазовые углы

$$\psi_{A,i}(\alpha) = \frac{2\pi L_{AO_c} \mu_{\text{НС},i}^T \mathbf{1}_{AO_c,3}(\alpha)}{\lambda}, \psi_{B,i}(\alpha) = \frac{2\pi L_{BO_c} \mu_{\text{НС},i}^T \mathbf{1}_{BO_c,3}(\alpha)}{\lambda}, \psi_{C,i}(\alpha) = \frac{2\pi L_{CO_c} \mu_{\text{НС},i}^T \mathbf{1}_{CO_c,3}(\alpha)}{\lambda}, \quad (4)$$

где  $L_{AO_c}$ ,  $L_{BO_c}$ ,  $L_{CO_c}$  – расстояние между точкой  $O_c$  и точками  $A$ ,  $B$  и  $C$  соответственно.

Следовательно, можно записать

$$\begin{aligned} s_{A,i}(t) &= Ah_{\text{дк},i}(t - \tau_{A,i}) \cos\left((\omega_0 + \omega_{\text{д},i})t + \pi\vartheta_{\text{НС},i} + \varphi_{0,i} + \psi_{A,i}(\alpha) + \omega_{A,\text{д},i}t\right), \\ s_{B,i}(t) &= Ah_{\text{дк},i}(t - \tau_{B,i}) \cos\left((\omega_0 + \omega_{\text{д},i})t + \pi\vartheta_{\text{НС},i} + \varphi_{0,i} + \psi_{B,i}(\alpha) + \omega_{B,\text{д},i}t\right), \\ s_{C,i}(t) &= Ah_{\text{дк},i}(t - \tau_{C,i}) \cos\left((\omega_0 + \omega_{\text{д},i})t + \pi\vartheta_{\text{НС},i} + \varphi_{0,i} + \psi_{C,i}(\alpha) + \omega_{C,\text{д},i}t\right), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\omega_{A,\text{д},i}$ ,  $\omega_{B,\text{д},i}$ ,  $\omega_{C,\text{д},i}$  – доплеровские смещения частот сигналов в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$  соответственно, обусловленные вращением треугольника  $ABC$  относительно точки  $O_c$ .

При приеме  $n$  спутниковых радиосигналов суммарные сигналы на малых временных интервалах (например, равным периоду дальномерного кода) описываются выражениями

$$\begin{aligned} s_A(t) &= \sum_{i=1}^n s_{A,i}(t) = \sum_{i=1}^n Ah_{\text{дк},i}(t - \tau_{A,i}) \cos\left((\omega_0 + \omega_{\text{д},i})t + \pi\vartheta_{\text{НС},i} + \varphi_{0,i} + \psi_{A,i}(\alpha) + \omega_{A,\text{д},i}t\right), \\ s_B(t) &= \sum_{i=1}^n s_{B,i}(t) = \sum_{i=1}^n Ah_{\text{дк},i}(t - \tau_{B,i}) \cos\left((\omega_0 + \omega_{\text{д},i})t + \pi\vartheta_{\text{НС},i} + \varphi_{0,i} + \psi_{B,i}(\alpha) + \omega_{B,\text{д},i}t\right), \\ s_C(t) &= \sum_{i=1}^n s_{C,i}(t) = \sum_{i=1}^n Ah_{\text{дк},i}(t - \tau_{C,i}) \cos\left((\omega_0 + \omega_{\text{д},i})t + \pi\vartheta_{\text{НС},i} + \varphi_{0,i} + \psi_{C,i}(\alpha) + \omega_{C,\text{д},i}t\right). \end{aligned} \quad (6)$$

Запишем уравнения наблюдений в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$ :

$$y_A(t) = s_A(t) + n_A(t), \quad y_B(t) = s_B(t) + n_B(t), \quad y_C(t) = s_C(t) + n_C(t),$$

где  $n_A(t)$ ,  $n_B(t)$  и  $n_C(t)$  – независимые белые гауссовские шумы с равными двусторонними спектральными плотностями  $N_0/2$ .

Введем векторное наблюдение  $\mathbf{y}(t) = [y_A(t) \quad y_B(t) \quad y_C(t)]^T$  и запишем

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t),$$

где  $\mathbf{s}(t) = [s_A(t) \quad s_B(t) \quad s_C(t)]^T$ ,  $\mathbf{n}(t) = [n_A(t) \quad n_B(t) \quad n_C(t)]^T$  – векторный белый гауссовский шум с матрицей двусторонних спектральных плотностей  $\mathbf{N}_0 = \mathbf{I}N_0/2$ .

В дальнейшем вместо непрерывного времени будем рассматривать дискретное время с двойной индексацией, т.е.  $t \rightarrow t_{k,j}$ ,  $j = \overline{0, M}$ .

Динамику изменения вектора углов ориентации зададим уравнениями

$$\alpha_k = \alpha_{k-1} + T V_{\alpha,k-1}, \quad \mathbf{v}_{\alpha,k} = \mathbf{v}_{\alpha,k-1} + \xi_{\alpha,k-1}, \quad (7)$$

где  $\xi_{\alpha,k-1}$  – вектор дискретных белых гауссовских шумов с матрицей дисперсий  $D_{\xi}$ .

**Синтез оптимального алгоритма фильтрации углов ориентации.** Введем вектор состояния

$\mathbf{X}_k = \begin{bmatrix} \alpha_k \\ \mathbf{v}_{\alpha,k} \end{bmatrix}$ , для которого запишем матричное уравнение

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{F}\mathbf{X}_{k-1} + \mathbf{G}\xi_{\alpha,k-1}, \quad (8)$$

где  $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & T\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$ ;  $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$ ;  $\mathbf{I}$  – единичная матрица размером  $3 \times 3$ .

Запишем уравнения оптимальной фильтрации вектора  $\mathbf{X}_k$  в гауссовском приближении [1], полагая задержки  $\tau_{A,i}$ ,  $\tau_{B,i}$ ,  $\tau_{C,i}$  и доплеровские смещения частот  $\omega_{\text{д},i}$ ,  $\omega_{B,\text{д},i}$ ,  $\omega_{C,\text{д},i}$ ,  $i = \overline{1, n}$  известными

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \bar{\mathbf{X}}_k + \mathbf{D}_{\mathbf{X},k} \left( \frac{\partial F_k(\bar{\mathbf{X}}_k)}{\partial \mathbf{X}} \right)^T, \quad (9)$$

$$\bar{\mathbf{X}}_k = \mathbf{F} \bar{\mathbf{X}}_{k-1}, \quad (10)$$

$$\bar{\mathbf{D}}_{\mathbf{X},k} = \mathbf{F} \mathbf{D}_{\mathbf{X},k-1} \mathbf{F}^T + \mathbf{G} \mathbf{D}_\varphi \mathbf{G}^T, \quad (11)$$

$$\mathbf{D}_{\mathbf{X},k} = \bar{\mathbf{D}}_{\mathbf{X},k} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left( \frac{\partial F_k(\bar{\mathbf{X}}_k)}{\partial \mathbf{X}} \right)^T, \quad (12)$$

где  $\hat{\mathbf{X}}_k$  – оценка фильтруемого процесса;  $\bar{\mathbf{X}}_k$  – экстраполированная оценка процесса;  $\mathbf{D}_{\mathbf{X},k}$  – матрица дисперсий ошибок фильтрации;  $\bar{\mathbf{D}}_{\mathbf{X},k}$  – матрица дисперсий ошибок экстраполяции;

$$F_k(\mathbf{X}_k) = \ln p(\mathbf{Y}_{k-1}^k | \mathbf{X}_k). \quad (13)$$

Сигнальные функции (6) в дискретном времени для моментов  $t_{k,j} \in [t_{k,1}, t_{k,M}]$ , где  $t_{k,j} = t_k + jT_d$ ,  $T_d$  – шаг дискретизации АЦП,  $MT_d = T$  – интервал времени, кратный периоду дальномерного кода,

$$\begin{aligned} s_{A,k,j} &= \sum_{i=1}^n A h_{\text{ПК},i}(t_{k,j} - \tau_{A,i,k}) \cos((\omega_0 + \omega_{\text{Л},i,k}) t_{k,j} + \pi \vartheta_{\text{НС},i,k} + \varphi_{0,i} + \psi_{A,i}(\alpha) + \omega_{A,\Psi,i} t), \\ s_{B,k,j} &= \sum_{i=1}^n A h_{\text{ПК},i}(t_{k,j} - \tau_{B,i,k}) \cos((\omega_0 + \omega_{\text{Л},i,k}) t_{k,j} + \pi \vartheta_{\text{НС},i,k} + \varphi_{0,i,k} + \psi_{B,i}(\alpha) + \omega_{B,\Psi,i} t), \\ s_{C,k,j} &= \sum_{i=1}^n A h_{\text{ПК},i}(t_{k,j} - \tau_{C,i,k}) \cos((\omega_0 + \omega_{\text{Л},i,k}) t_{k,j} + \pi \vartheta_{\text{НС},i,k} + \varphi_{0,i} + \psi_{C,i}(\alpha) + \omega_{C,\Psi,i} t). \end{aligned} \quad (14)$$

В (14) параметры  $\varphi_{0,i,k}$  и  $\vartheta_{\text{НС},i,k}$  являются неинформативными. Поэтому рассмотрим усредненную по данным параметрам функцию правдоподобия

$$p(\mathbf{Y}_{k-1}^k | \mathbf{X}_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} p(\mathbf{Y}_{k-1}^k | \mathbf{X}_k, \varphi_{0,i,k} \vartheta_{\text{НС},i,k}, i = \overline{1, n}) d\varphi_{0,1,k} \dots d\varphi_{0,n,k} = c \prod_{i=1}^n I_0 \left( \frac{A}{\sigma_n} X_i(\alpha) \right), \quad (15)$$

где  $I_0(x)$  – функции бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента;

$$X_i^2(\mathbf{a}_{k-1}) = X_{c,i}^2(\mathbf{a}_{k-1}) + X_{s,i}^2(\mathbf{a}_{k-1}), \quad (16)$$

$$\begin{aligned} X_{c,i}(\mathbf{a}_{k-1}) &= \sum_{l=1}^M \left[ \left[ y_{A,i}(t_{k-l}) h_{\text{ПК},i}(t - \tau_{A,i,k-l}) \cos(\omega_0 t_{k-l} + (\omega_{\text{Л},i,k-l} + \omega_{A,\Psi,i,k-l})(l-1)T_d + \psi_{A,i}(\alpha)) + \right. \right. \\ &+ y_{B,i}(t_{k-l}) h_{\text{ПК},i}(t - \tau_{B,i,k-l}) \cos(\omega_0 t_{k-l} + (\omega_{\text{Л},i,k-l} - \omega_{B,\Psi,i,k-l})(l-1)T_d + \psi_{B,i,k-l}(\mathbf{a}_{k-1})) \left. \right] + \\ &+ y_{C,i}(t_{k-l}) h_{\text{ПК},i}(t - \tau_{C,i,k-l}) \cos(\omega_0 t_{k-l} + (\omega_{\text{Л},i,k-l} + \omega_{C,\Psi,i,k-l})(l-1)T_d + \psi_{C,i,k-l}(\mathbf{a}_{k-1})) \left. \right], \\ X_{s,i}(\mathbf{a}_{k-1}) &= \sum_{l=1}^M \left[ \left[ y_{A,i}(t_{k-l}) h_{\text{ПК},i}(t - \tau_{A,i,k-l}) \sin(\omega_0 t_{k-l} + (\omega_{\text{Л},i,k-l} + \omega_{A,\Psi,i,k-l})(l-1)T_d + \psi_{A,i}(\alpha)) + \right. \right. \\ &+ y_{B,i}(t_{k-l}) h_{\text{ПК},i}(t - \tau_{B,i,k-l}) \sin(\omega_0 t_{k-l} + (\omega_{\text{Л},i,k-l} - \omega_{B,\Psi,i,k-l})(l-1)T_d + \psi_{B,i,k-l}(\mathbf{a}_{k-1})) \left. \right] + \\ &+ y_{C,i}(t_{k-l}) h_{\text{ПК},i}(t - \tau_{C,i,k-l}) \sin(\omega_0 t_{k-l} + (\omega_{\text{Л},i,k-l} - \omega_{C,\Psi,i,k-l})(l-1)T_d + \psi_{C,i,k-l}(\mathbf{a}_{k-1})) \left. \right], \end{aligned} \quad (17)$$

Представим (17) в виде

$$\begin{aligned}
 X_{C,i}(\mathbf{a}_{k-1}) &= I_{A,i,k} \cos(\psi_{A,i,k-1}(\mathbf{a}_{k-1})) + I_{B,i,k} \cos(\psi_{B,i,k-1}(\mathbf{a}_{k-1})) + I_{C,i,k} \cos(\psi_{C,i,k-1}(\mathbf{a}_{k-1})) - \\
 &- (Q_{A,i,k} \sin(\psi_{A,i,k-1}(\mathbf{a}_{k-1})) + Q_{B,i,k} \sin(\psi_{B,i,k-1}(\mathbf{a}_{k-1})) + Q_{C,i,k} \sin(\psi_{C,i,k-1}(\mathbf{a}_{k-1}))), \\
 X_{S,i}(\mathbf{a}_{k-1}) &= Q_{A,i,k} \cos(\psi_{A,i,k-1}(\mathbf{a}_{k-1})) + Q_{B,i,k} \cos(\psi_{B,i,k-1}(\mathbf{a}_{k-1})) + Q_{C,i,k} \cos(\psi_{C,i,k-1}(\mathbf{a}_{k-1})) + \\
 &+ I_{A,i,k} \sin(\psi_{A,i,k-1}(\mathbf{a}_{k-1})) + I_{B,i,k} \sin(\psi_{B,i,k-1}(\mathbf{a}_{k-1})) + I_{C,i,k} \sin(\psi_{C,i,k-1}(\mathbf{a}_{k-1})),
 \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned}
 I_{A,i,k} &= \sum_{l=1}^M y_{A,l}(t_{k-l}) h_{\text{нл},i}(t - \tau_{A,i,k-1}) \cos(\omega_0 t_{k-l} + (\omega_{\text{нл},i,k-1} + \omega_{A,\text{нл},i,k-1})(l-1)T_d), \\
 I_{B,i,k} &= \sum_{l=1}^M y_{B,l}(t_{k-l}) h_{\text{нл},i}(t - \tau_{B,i,k-1}) \cos(\omega_0 t_{k-l} + (\omega_{\text{нл},i,k-1} + \omega_{B,\text{нл},i,k-1})(l-1)T_d), \\
 I_{C,i,k} &= \sum_{l=1}^M y_{C,l}(t_{k-l}) h_{\text{нл},i}(t - \tau_{C,i,k-1}) \cos(\omega_0 t_{k-l} + (\omega_{\text{нл},i,k-1} + \omega_{C,\text{нл},i,k-1})(l-1)T_d), \\
 Q_{A,i,k} &= \sum_{l=1}^M y_{A,l}(t_{k-l}) h_{\text{нл},i}(t - \tau_{A,i,k-1}) \sin(\omega_0 t_{k-l} + (\omega_{\text{нл},i,k-1} + \omega_{A,\text{нл},i,k-1})(l-1)T_d), \\
 Q_{B,i,k} &= \sum_{l=1}^M y_{B,l}(t_{k-l}) h_{\text{нл},i}(t - \tau_{B,i,k-1}) \sin(\omega_0 t_{k-l} + (\omega_{\text{нл},i,k-1} + \omega_{B,\text{нл},i,k-1})(l-1)T_d), \\
 Q_{C,i,k} &= \sum_{l=1}^M y_{C,l}(t_{k-l}) h_{\text{нл},i}(t - \tau_{C,i,k-1}) \sin(\omega_0 t_{k-l} + (\omega_{\text{нл},i,k-1} + \omega_{C,\text{нл},i,k-1})(l-1)T_d),
 \end{aligned} \quad (19)$$

Отметим, что корреляционные интегралы (19) необходимо вычислять в единой шкале времени.

Подставляя (16) в (14) и проделав необходимые преобразования, получаем

$$\begin{aligned}
 X_i^2(\mathbf{a}_{k-1}) &= I_{A,i,k}^2 + Q_{A,i,k}^2 + I_{B,i,k}^2 + Q_{B,i,k}^2 + I_{C,i,k}^2 + Q_{C,i,k}^2 + 2\cos(\psi_{A,i,k-1}(\mathbf{a}_{k-1}) - \psi_{B,i,k-1}(\mathbf{a}_{k-1})) (I_{A,i,k} I_{B,i,k} + Q_{A,i,k} Q_{B,i,k}) + \\
 &+ 2\sin(\psi_{A,i,k-1}(\mathbf{a}_{k-1}) - \psi_{B,i,k-1}(\mathbf{a}_{k-1})) (I_{A,i,k} Q_{B,i,k} - Q_{A,i,k} I_{B,i,k}) + 2\cos(\psi_{A,i,k-1}(\mathbf{a}_{k-1}) - \psi_{C,i,k-1}(\mathbf{a}_{k-1})) (I_{A,i,k} I_{C,i,k} + Q_{A,i,k} Q_{C,i,k}) + \\
 &+ 2\sin(\psi_{A,i,k-1}(\mathbf{a}_{k-1}) - \psi_{C,i,k-1}(\mathbf{a}_{k-1})) (I_{A,i,k} Q_{C,i,k} - Q_{A,i,k} I_{C,i,k}) + 2\cos(\psi_{B,i,k-1}(\mathbf{a}_{k-1}) - \psi_{C,i,k-1}(\mathbf{a}_{k-1})) (I_{B,i,k} I_{C,i,k} + Q_{B,i,k} Q_{C,i,k}) + \\
 &+ 2\sin(\psi_{B,i,k-1}(\mathbf{a}_{k-1}) - \psi_{C,i,k-1}(\mathbf{a}_{k-1})) (I_{B,i,k} Q_{C,i,k} - Q_{B,i,k} I_{C,i,k}).
 \end{aligned} \quad (20)$$

Введем вектор  $\boldsymbol{\psi} = [\psi_{A1} \dots \psi_{An} \ \psi_{B1} \dots \psi_{Bn} \ \psi_{C1} \dots \psi_{Cn}]^T$  и матрицу  $\mathbf{c}$  такую, что  $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{c}\mathbf{X}$ .

Преобразуем производную

$$\frac{\partial F_k(\mathbf{X}_k)}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial F_k(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{a}_k))}{\partial \boldsymbol{\psi}} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial F_k(\mathbf{a}_k)}{\partial \boldsymbol{\psi}} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \mathbf{c}. \quad (21)$$

Рассмотрим

$$\frac{\partial F_k(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{a}_k))}{\partial \boldsymbol{\psi}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\psi}} \left[ \sum_{i=1}^n \left( \ln I_0 \left( \frac{A}{\sigma_n^2} X_i(\boldsymbol{\alpha}) \right) \right) \right] = \left[ \frac{\partial}{\partial \psi_{A1}} \left( \ln I_0 \left( \frac{A}{\sigma_n^2} X_1(\boldsymbol{\alpha}) \right) \right) \dots \frac{\partial}{\partial \psi_{Bn}} \left( \ln I_0 \left( \frac{A}{\sigma_n^2} X_n(\boldsymbol{\alpha}) \right) \right) \dots \frac{\partial}{\partial \psi_{Cn}} \left( \ln I_0 \left( \frac{A}{\sigma_n^2} X_n(\boldsymbol{\alpha}) \right) \right) \right]. \quad (22)$$

Здесь

$$\frac{\partial}{\partial \psi_{A(B,C)l}} \left( \ln I_0 \left( \frac{A}{\sigma_n^2} X_l(\boldsymbol{\alpha}) \right) \right) = \frac{I_1 \left( \frac{A}{\sigma_n^2} X_l(\boldsymbol{\alpha}) \right)}{I_0 \left( \frac{A}{\sigma_n^2} X_l(\boldsymbol{\alpha}) \right)} \frac{A}{\sigma_n^2} \frac{\partial X_l(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \psi_{A(B,C)l}} \quad (23)$$

– дискриминатор разности фаз.

Производная  $\frac{\partial X_i(\mathbf{a})}{\partial \psi_{A(B,C)l}}$  получается дифференцированием (20) по соответствующему параметру

$\psi_{A(B,C)l}$  и, например, для  $\psi_{A_l}$  имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_i(\mathbf{a})}{\partial \psi_{A_l}} &= \frac{1}{2X_i(\mathbf{a})} \frac{\partial X_i^2(\mathbf{a})}{\partial \psi_{A_l}} = \frac{1}{X_i(\mathbf{a})} \left[ -\sin(\psi_{A_l, k-1}(\mathbf{a}_{k-1}) - \psi_{B_l, k-1}(\mathbf{a}_{k-1})) (I_{A_l, k} I_{B_l, k} + Q_{A_l, k} Q_{B_l, k}) + \right. \\ &+ \cos(\psi_{A_l, k-1}(\mathbf{a}_{k-1}) - \psi_{B_l, k-1}(\mathbf{a}_{k-1})) (I_{A_l, k} Q_{B_l, k} - Q_{A_l, k} I_{B_l, k}) - \sin(\psi_{A_l, k-1}(\mathbf{a}_{k-1}) - \psi_{C_l, k-1}(\mathbf{a}_{k-1})) (I_{A_l, k} I_{C_l, k} + Q_{A_l, k} Q_{C_l, k}) + \\ &\left. + \cos(\psi_{A_l, k-1}(\mathbf{a}_{k-1}) - \psi_{C_l, k-1}(\mathbf{a}_{k-1})) (I_{A_l, k} Q_{C_l, k} - Q_{A_l, k} I_{C_l, k}) \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Запишем фазы  $\psi_{A_l}(\mathbf{a})$ ,  $\psi_{B_l}(\mathbf{a})$ ,  $\psi_{C_l}(\mathbf{a})$  с учетом (1), (4) в виде

$$\psi_{A_l}(\mathbf{a}) = \frac{2\pi l \mu_{НС,l}^T U_c^3(\mathbf{a}) \mathbf{1}_{AO_c, c}}{\lambda}, \quad \psi_{B_l}(\mathbf{a}) = \frac{2\pi l \mu_{НС,l}^T U_c^3(\mathbf{a}) \mathbf{1}_{BO_c, c}}{\lambda}, \quad \psi_{C_l}(\mathbf{a}) = \frac{2\pi l \mu_{НС,l}^T U_c^3(\mathbf{a}) \mathbf{1}_{CO_c, c}}{\lambda}. \quad (24)$$

Представим вектор  $\psi$  в виде  $\psi = [\psi_A^T \ \psi_B^T \ \psi_C^T]^T$ , где  $\psi_{A(B,C)} = [\psi_{A_1} \ \dots \ \psi_{A_n}]^T$ , и запишем производную  $\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{a}}$  в виде блочной матрицы

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{a}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_A}{\partial \mathbf{a}} \\ \frac{\partial \psi_B}{\partial \mathbf{a}} \\ \frac{\partial \psi_C}{\partial \mathbf{a}} \end{bmatrix},$$

где

$$\frac{\partial \psi_A}{\partial \mathbf{a}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_{A_1}}{\partial \mathbf{a}} \\ \dots \\ \frac{\partial \psi_{A_n}}{\partial \mathbf{a}} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \psi_B}{\partial \mathbf{a}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_{B_1}}{\partial \mathbf{a}} \\ \dots \\ \frac{\partial \psi_{B_n}}{\partial \mathbf{a}} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \psi_C}{\partial \mathbf{a}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_{C_1}}{\partial \mathbf{a}} \\ \dots \\ \frac{\partial \psi_{C_n}}{\partial \mathbf{a}} \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Запишем выражение для производной:

$$\frac{\partial \psi_{A_l}}{\partial \mathbf{a}} = \frac{2\pi L_{AO_c}}{\lambda} \mu_{НС,l}^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} (U_c^3(\mathbf{a}) \mathbf{1}_{AO_c, c}). \quad (26)$$

Введем матрицу

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mu_{НС,1}^T \\ \mu_{НС,2}^T \\ \dots \\ \mu_{НС,n}^T \end{bmatrix}.$$

Тогда с учетом (25), (26) можно записать выражение

$$\frac{\partial \psi_A}{\partial \mathbf{a}} = \frac{2\pi L_{AO_c}}{\lambda} \mathbf{M} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} (U_c^3(\mathbf{a}) \mathbf{1}_{AO_c, c}). \quad (27)$$

Аналогичные выражения можно записать для производных

$$\frac{\partial \psi_B}{\partial \mathbf{a}} = \frac{2\pi L_{BO_c}}{\lambda} \mathbf{M} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} (U_c^3(\mathbf{a}) \mathbf{1}_{BO_c, c}), \quad \frac{\partial \psi_C}{\partial \mathbf{a}} = \frac{2\pi L_{CO_c}}{\lambda} \mathbf{M} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} (U_c^3(\mathbf{a}) \mathbf{1}_{CO_c, c}). \quad (28)$$

Отметим, что в (27), (28) дифференцированию по углам ориентации  $\alpha$  подлежат только элементы матрицы преобразований  $U_c^3(\alpha)$ .

С учетом полученных выражений запишем

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} L_{AO_c} \mathbf{M} \frac{\partial}{\partial \alpha} (U_c^3(\alpha) \mathbf{1}_{AO_c, c}) \\ L_{BO_c} \mathbf{M} \frac{\partial}{\partial \alpha} (U_c^3(\alpha) \mathbf{1}_{BO_c, c}) \\ L_{CO_c} \mathbf{M} \frac{\partial}{\partial \alpha} (U_c^3(\alpha) \mathbf{1}_{CO_c, c}) \end{pmatrix}.$$

Тогда (21) представим в виде

$$\frac{\partial F_k(\mathbf{X}_k)}{\partial \mathbf{X}} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\partial F_k(\mathbf{a}_k)}{\partial \Psi} \begin{pmatrix} L_{AO_c} \mathbf{M} \frac{\partial}{\partial \alpha} (U_c^3(\alpha) \mathbf{1}_{AO_c, c}) \\ L_{BO_c} \mathbf{M} \frac{\partial}{\partial \alpha} (U_c^3(\alpha) \mathbf{1}_{BO_c, c}) \\ L_{CO_c} \mathbf{M} \frac{\partial}{\partial \alpha} (U_c^3(\alpha) \mathbf{1}_{CO_c, c}) \end{pmatrix}^c. \quad (29)$$

Подставляя (29) в (9), запишем уравнение для оценки вектора состояния

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \tilde{\mathbf{X}}_k + \mathbf{D}_{X,k} \mathbf{c}^T \begin{pmatrix} L_{AO_c} \mathbf{M} \frac{\partial}{\partial \alpha} (U_c^3(\alpha) \mathbf{1}_{AO_c, c})^T \\ L_{BO_c} \mathbf{M} \frac{\partial}{\partial \alpha} (U_c^3(\alpha) \mathbf{1}_{BO_c, c}) \\ L_{CO_c} \mathbf{M} \frac{\partial}{\partial \alpha} (U_c^3(\alpha) \mathbf{1}_{CO_c, c}) \end{pmatrix}^T \left( \frac{\partial F_k(\mathbf{a}_k)}{\partial \Psi} \right)^T =$$

$$= \tilde{\mathbf{X}}_k + \mathbf{D}_{X,k} \mathbf{c}^T \begin{pmatrix} L_{AO_c} \mathbf{M} \frac{\partial}{\partial \alpha} (U_c^3(\alpha) \mathbf{1}_{AO_c, c})^T \\ L_{BO_c} \mathbf{M} \frac{\partial}{\partial \alpha} (U_c^3(\alpha) \mathbf{1}_{BO_c, c}) \\ L_{CO_c} \mathbf{M} \frac{\partial}{\partial \alpha} (U_c^3(\alpha) \mathbf{1}_{CO_c, c}) \end{pmatrix}^T \mathbf{u}_{\Delta \Psi, k} = \tilde{\mathbf{X}}_k + \mathbf{D}_{X,k} \mathbf{c}^T \mathbf{u}_{\Delta \alpha, k}, \quad (30)$$

где

$$\mathbf{u}_{\Delta \Psi, k} = \left( \frac{\partial F_k(\mathbf{a}_k)}{\partial \Psi} \right)^T \quad (31)$$

– вектор дискриминаторов разностей фаз по сигналам видимых НС;

$$\mathbf{u}_{\Delta \alpha, k} = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} L_{AO_c} \mathbf{M} \frac{\partial}{\partial \alpha} (U_c^3(\alpha) \mathbf{1}_{AO_c, c})^T \\ L_{BO_c} \mathbf{M} \frac{\partial}{\partial \alpha} (U_c^3(\alpha) \mathbf{1}_{BO_c, c}) \\ L_{CO_c} \mathbf{M} \frac{\partial}{\partial \alpha} (U_c^3(\alpha) \mathbf{1}_{CO_c, c}) \end{pmatrix}^T \mathbf{u}_{\Delta \Psi, k} \quad (32)$$

– вектор дискриминаторов по углам ориентации.

Обобщенная структурная схема одноэтапной когерентно-некогерентной системы фильтрации углов ориентации объекта приведена на рис. 2.

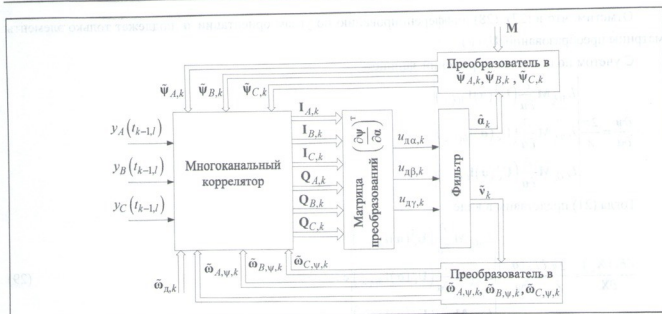


Рис. 2. Обобщенная схема одноэтапной когерентно-некогерентной системы фильтрации углов ориентации объекта

Синтезированный алгоритм одноэтапной когерентно-некогерентной фильтрации углов ориентации объекта моделировался на ЭВМ. Для наглядности приведем результаты упрощенного варианта. Положим, что треугольник  $ABC$  – равнобедренный с длиной стороны  $l$ , точка  $O_c$  СК  $O_c X_c Y_c Z_c$  расположена в середине линии  $AB$ , ось  $O_c X_c$  направлена к точке  $B$ , а ось  $O_c Y_c$  – к точке  $C$ . Объект вращается только вокруг оси  $O_c Y_c$ .

**Пример.** При моделировании полагаем  $V_0 = 300$  м/с;  $a_0 = 40$  м/с<sup>2</sup>;  $v = \frac{2\pi}{5 \times 60}$ ,  $\tilde{q}_{c/n_0} = 40$  дБГц,  $l = 1,5$  м.

В следящей системе (20) будем использовать фильтр с постоянными параметрами о коэффициентами усиления  $K_1 = K_{1n}T$ ,  $K_2 = K_{2n}T$ ,  $K_{2n} = (\Delta f_{cc}/0,53)^2$ ,  $K_{1n} = \sqrt{2}K_{2n}$ , где  $\Delta f_{cc}$  – полоса пропускания следящей системы (СС).

Предположим, что ошибки по доплеровским частотам отсутствуют. Рассмотрим сначала случай нулевых начальных ошибок по углу и угловой скорости. Пусть  $\Delta f_{cc} = 2$  Гц, а число НС – 8 равномерно распределенных по углу в зоне видимости.

На рис. 3 приведена реализация ошибки слежения по углу. СКО оценки  $\sigma_\beta = 0,75$  угл. мин.

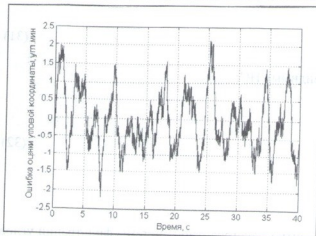


Рис. 3. Ошибка слежения по углу при  $\Delta f_{cc} = 2$  Гц,  $m = 8$

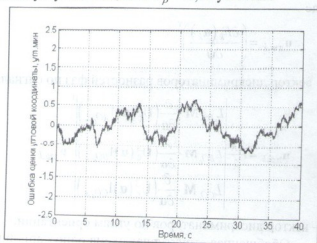


Рис. 4. Ошибка слежения по углу при  $\Delta f_{cc} = 0,5$  Гц,  $m = 8$



Сузим полосу пропускания СС  $\Delta f_{\text{СС}} = 0,5$  Гц.

На рис. 4 приведена реализация ошибки слежения по углу. СКО оценки  $\sigma_{\beta} = 0,34$  угл. мин.

Положим  $\Delta f_{\text{СС}} = 2$  Гц, а число НС – 2 (первые 2 из предыдущих 8).

На рис. 5 приведена реализация ошибки слежения по углу. СКО оценки  $\sigma_{\beta} = 5,48$  угл. мин.

Иследуем влияние начальной ошибки по угловой координате (при нулевой ошибке по угловой скорости). Положим начальную ошибку по угловой координате  $\Delta\beta_{\text{нач}} = 5^{\circ}$ ,  $\Delta f_{\text{СС}} = 2$  гц, а число нс – 8.

На рис. 6 приведена реализация ошибки слежения по углу. СКО оценки угла в установившемся режиме  $\sigma_{\beta} = 0,77$  угл.мин.

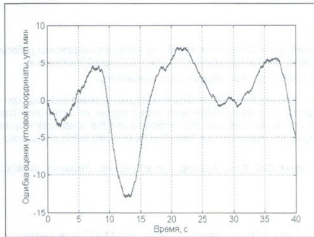


Рис. 5. Ошибка слежения по углу при  $\Delta f_{\text{СС}} = 2$  Гц,  $m = 2$

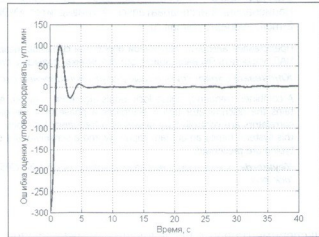


Рис. 6. Ошибка слежения по углу при  $\Delta f_{\text{СС}} = 2$  Гц,  $m = 8$ ,  $\Delta\beta_{\text{нач}} = 5^{\circ}$

Из приведенных результатов моделирования следует, что одноэтапный алгоритм фильтрации углов ориентации объекта успешно работает в различных тактических ситуациях. Отметим также следующее:

В синтезированном алгоритме оценивания углов ориентации объекта отсутствуют следящие системы за разностями фаз принимаемых сигналов, как это имело место в алгоритмах, описанных в [1, 3];

В синтезированном алгоритме оценивания углов ориентации объекта отсутствуют процедуры разрешения неоднозначности фазовых измерений по сигналам НС.

Проведен синтез оптимального одноэтапного когерентно-некогерентного алгоритма определения угловой ориентации объекта по сигналам спутниковой радионавигационной системы, в котором отсутствуют следящие системы за фазами принимаемых сигналов, что обеспечивает повышение его помехоустойчивости при сохранении высокой точности оценки углов ориентации. Приведены результаты моделирования, из которых следует, что одноэтапный алгоритм фильтрации углов ориентации объекта успешно работает в различных тактических ситуациях. Показано, что при длине базовой линии  $l = 1,5$  м возможно достижение СКО ошибки оценки углов ориентации порядка  $0,5 \dots 0,7$  угл. мин.

## Литература

1. Глазасе. Принципы построения и функционирования. Изд-е 4-е / под ред. А.И. Перова, В.Н. Харисова. М.: Радиотехника. 2010. 800 с.
2. Перов А.И. оптимальная фильтрация разности фаз двух сигналов СРНС, принятых в двух пространственно разнесенных точках // Радиотехника. 2008. № 8. С. 76–82.
3. Перов А.И., Корогодин И.В. комбинированная когерентно-некогерентная система определения углов ориентации объекта по сигналам спутниковых радионавигационных систем // Радиотехника. 2009. № 7. С. 33–40.
4. Перов А.И. одноэтапный когерентно-некогерентный алгоритм определения угловой ориентации базовой линии по сигналам спутниковой радионавигационной системы // электромагнитные волны и электронные системы. 2014. С. 19–25.

Радиолокация  
и радиометрия

Методы и средства  
оптоэлектроники  
в радиофизике

Системы  
радиоуправления

Антенны и техника СВЧ

Робототехника

Биомедицинская  
электроника

Технологии  
живых  
систем

Новые  
информационные  
технологии

Нейрокомпьютинг

Нанотехнологии

Информационные  
и измерительные  
системы

# Радионавигационные технологии



УДК 629.78  
ББК 39.67  
П 15

## НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЕ СЕРИИ

Редакционный совет:

д.ф.-м.н., проф. О.В. Бешкий, акад. Ю.В. Гуляев, д.т.н., проф. А.Ю. Гринев, д.т.н., проф. Ю.Л. Козирацкий, д.т.н., проф. Г.С. Кондратенков, д.т.н., проф. А.В. Коренной, д.т.н., д.б.н. И.В. Матвейчук, д.т.н., проф. В.И. Меркулов, д.т.н., проф. А.И. Перов, к.б.н. А.В. Савельев, акад. А.С. Сигов, д.т.н. проф. М.С. Ярылков

Выпуск 4

### Серия «Радиосвязь и радионавигация»

Рецензент:

докт. техн. наук, профессор *В.Н. Харисов* (ОАО «ВНИИР Прогресс»)

П 15 Радионавигационные технологии. Сб. статей. / Под ред. *А.И. Перова*. – М.: Радиотехника, 2015. – 144 с.: ил. Научно-технические серии. Вып. 4. Серия «Радиосвязь и радионавигация». (Авторы указаны на с. 144)

ISBN 978-5-93108-096-3

Отражены теоретические вопросы спутниковой навигации, технологии перспективной системы ГЛОНАСС, показаны результаты экспериментальных исследований технологий спутниковой навигации; рассмотрены вопросы мониторинга навигационных сигналов; даны приложения технологий спутниковой навигации в различных областях. Книга подготовлена по материалам научно-технической конференции «Радионавигационные технологии в приборостроении» (сентябрь 2014 г.).

*Для научных работников и инженеров, а также преподавателей и студентов вузов.*

УДК 629.78  
ББК 39.67

ISBN 978-5-93108-096-3

© Авторы, 2015

© ЗАО «Издательство «Радиотехника», 2015