# Лекция 5. Обнаружение сигнала: алгоритмы обнаружения, статистические характеристики обнаружения.

Болденков Е.Н.

Московский Энергетический институт

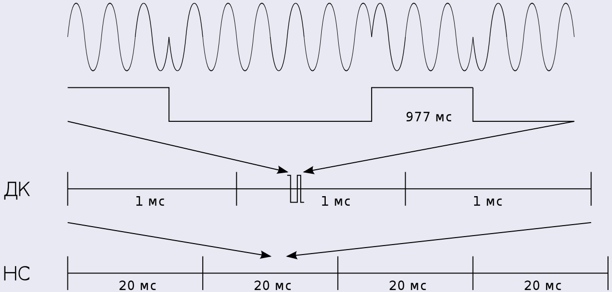
октябрь 2014

# Содержание

# Структура навигационного сигнала

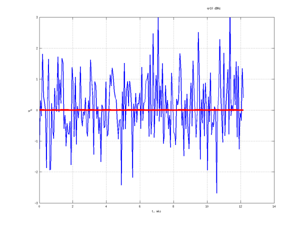
## Навигационный сигнал имеет вид:

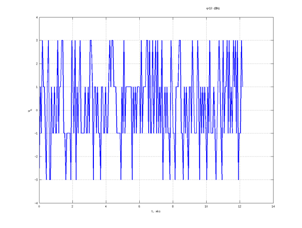
$$s_k = A \cdot G_{\text{ДК}}(t_k - \tau) G_{\text{НС}}(t_k - \tau) cos(\omega_0 t_k + \omega t_k + \varphi)$$



# Структура навигационного сигнала

## Навигационный сигнал наблюдается на фоне собственных шумов приёмника:





$$y_k = s_k + n_k$$

$n_k$ — аддитивный шум, полагаемый дискретным белым гауссовским с дисперсией отсчётов $\sigma^2$.

# Что такое обнаружение сигнала?

**Под обнаружением понимается оценка факта наличия сигнала с известными параметрами**

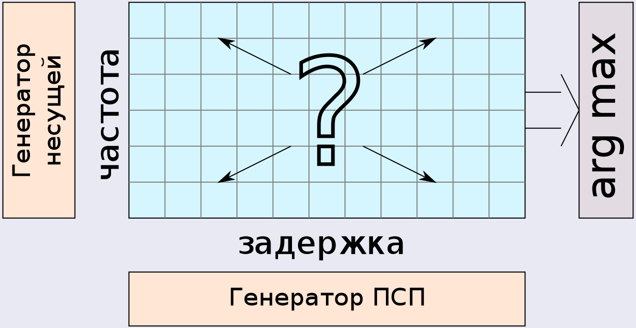
$$y_k = \theta \cdot s_k + n_k,$$

где $\theta \in \{0; 1\}$

Обнаружение должно быть сделано за интервал времени $t_k \in [0; T]$ с требуемой вероятностью.

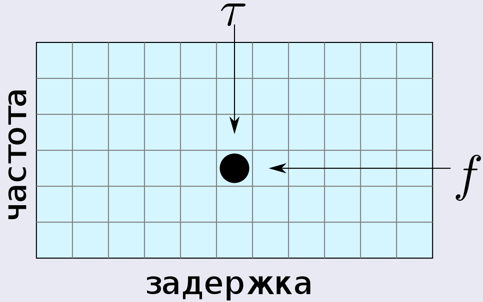
# Отличие обнаружения от поиска

**Задача поиска предполагает неизвестные частоту, задержку и ряд других параметров сигнала**



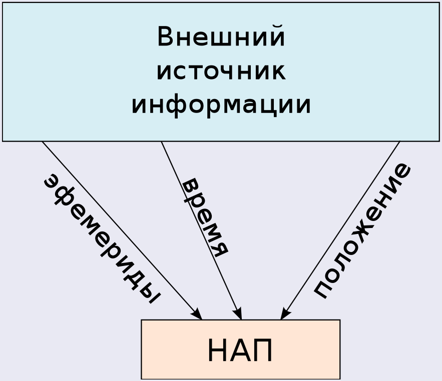
# Отличие обнаружения от поиска

**Задача обнаружения предполагает оценку факта наличия сигнала с известными параметрами.**



# Захват слежения по информации Assisted GNSS

## В ряде случаев параметры сигнала могут быть получены из внешней системы




Стандарт 3GPP предполагает передачу НАП координат базовой станции, эфемерид и времени.

# Захват слежения по информации Assisted GNSS

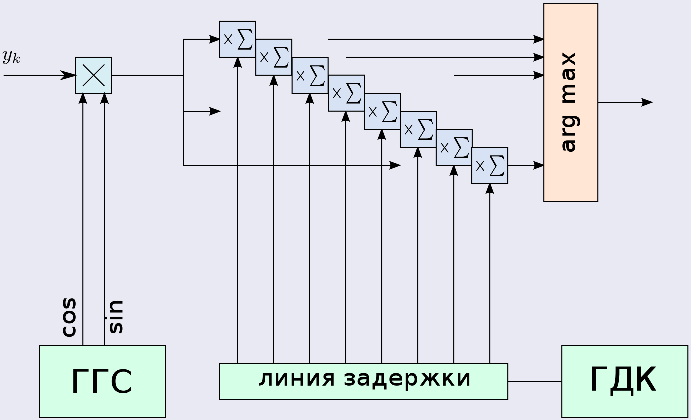
## Пример — Nokia имела свою службу A-GPS

# Восстановление слежения

**После пропадания сигнала на некоторое время его параметры примерно известны.**

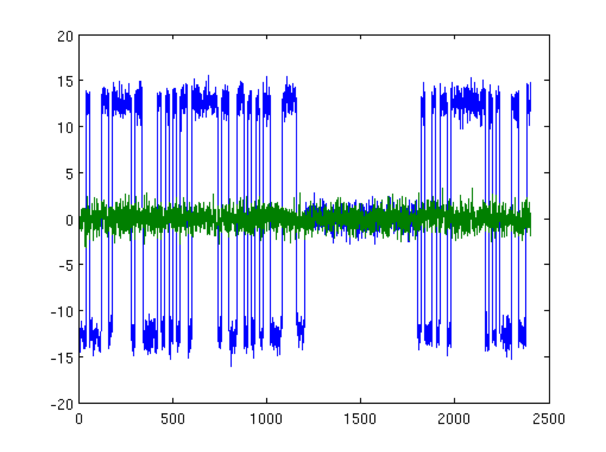
# Восстановление слежения

## Задача восстановления слежения более сложна — плавно переходит в допоиск



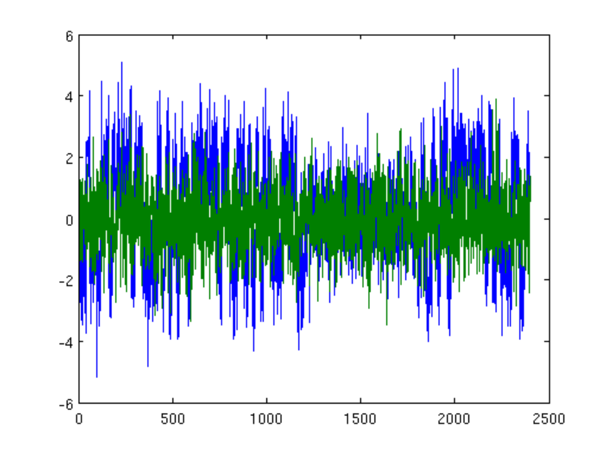
# Контроль приёма сигнала

## В следящем режиме нужно контролировать, не пропал ли сигнал



# Контроль приёма сигнала

## При малом отношении сигнал/шум определить факт слежения за сигналом непросто



**Итак, задача обнаружения сводится к оценке $\theta$**

$$y_k = \theta \cdot s_k + n_k,$$

где $\theta \in \{0; 1\}$

# Немного теории

**При отсутствии априорных данных можно использовать метод максимума правдоподобия**

$$p(y|\theta) \underset{\theta}{\rightarrow} \max$$

**Отсутствие априорных данных означает**

$$p\left(\theta = 0\right) \ = \ p\left(\theta = 1\right) \ = \ 0.5$$

# Немного теории

## Функция правдоподобия

$$p(y|\theta) = C \cdot exp\left\{-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=0}^{N}\left(y_{k,i} - \theta \cdot s_{k,i}\right)^2\right\}$$

### Как понять, что означает функция правдоподобия?

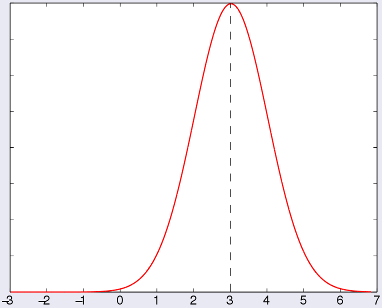
Для простоты рассмотрим наблюдение константы на фоне случайного гауссовского числа:

$$y = \theta \cdot A + n.$$

# Немного теории

## Если сигнал есть ($\theta = 1$), то функция имеет вид:

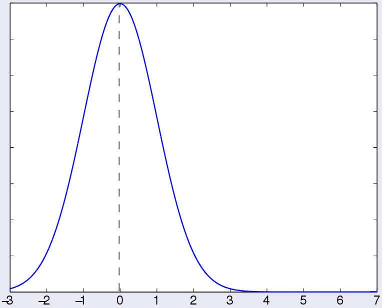
$$P\left(y|\theta = 1\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} exp\left\{-\frac{(y-A)^2}{2\sigma^2}\right\}$$



## Немного теории

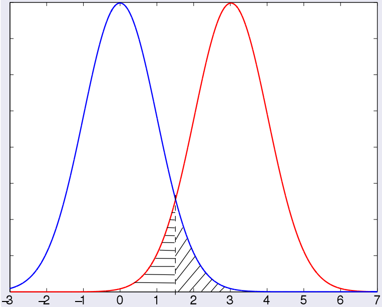
### Если сигнала нет ($\theta = 0$), то функция имеет вид:

$$P(y|\theta = 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right\}$$



## Решающее правило имеет вид:

$$p\left(y|\theta=0\right) < p\left(y|\theta=1\right)$$




$$p\left(y|\theta=0\right) = C \cdot exp\left\{-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=0}^{N} y_{k,i}^2\right\}$$

$$p\left(y|\theta=1\right) = C \cdot exp\left\{-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=0}^{N} \left(y_{k,i} - \theta \cdot s_{k,i}\right)\right)^2\right\}$$

# Немного теории

**Подставим распределения в неравенства и возьмём логарифм:**

$$-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=0}^{N} y_{k,i}^2 < -\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=0}^{N}\left(y_{k,i} - s_{k,i}\right)^2$$

## Подставим распределения в неравенства и возьмём логарифм:

$$-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=0}^{N} y_{k,i}^2 < -\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=0}^{N}\left(y_{k,i} - s_{k,i}\right)^2$$

## Раскроем скобки:

$$\sum_{i=0}^{N} y_{k,i}^2 dt > \sum_{i=0}^{N} y_{k,i}^2 - 2\sum_{i=0}^{N} y_{k,i}s_{k,i} + \sum_{i=0}^{N} s_{k,i}^2.$$

# Немного теории

## Подставим распределения в неравенства и возьмём логарифм:

$$-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=0}^{N} y_{k,i}^2 < -\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=0}^{N} \left(y_{k,i} - s_{k,i}\right)^2$$

## Раскроем скобки:

$$\sum_{i=0}^{N} y_{k,i}^2 dt > \sum_{i=0}^{N} y_{k,i}^2 - 2\sum_{i=0}^{N} y_{k,i}s_{k,i} + \sum_{i=0}^{N} s_{k,i}^2.$$

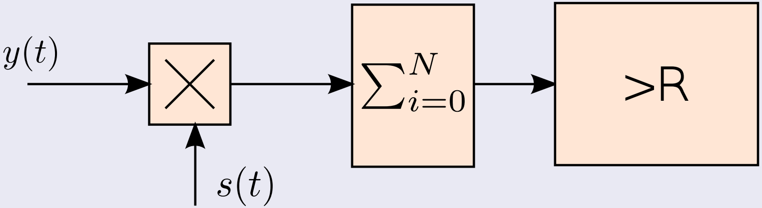
## Окончательное выражение:

$$\sum_{i=0}^{N} y_{k,i}s_{k,i} dt > \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N} s_{k,i}^2.$$

# Немного теории

## Порог сравнения:

$$R_k = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N} s_{k,i}^2$$



# Критерий Неймана-Пирсона

## Вводятся 4 ситуации

| | Сигнал есть | Сигнала нет |
|---|---|---|
| Сигнал обнаружен | $P_D$ | $P_F$ |
| Сигнал не обнаружен | $1 - P_D$ | $1 - P_F$ |

- $P_D$ — вероятность *правильного обнаружения*
- $P_F$ — вероятность *ложной тревоги*

# Критерий Неймана-Пирсона

## Правило выбора порога обнаружения:

Вероятность ложной тревоги должна быть равна заданной:

$$P_F(R) = P_{F0}$$

Вероятность правильного обнаружения должна быть максимальной:

$$P_D \to \max$$

# Критерий Неймана-Пирсона

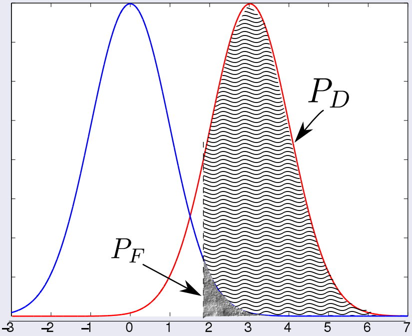
**Доказано, что при использовании метода максимального правдоподобия вероятность правильного обнаружения всегда максимизируется.**

В результате нужно определить порог, задав требуемую вероятность правильного обнаружения

$$\int_{R}^{+\infty} p_0(R) = P_{F0}$$

# Критерий Неймана-Пирсона

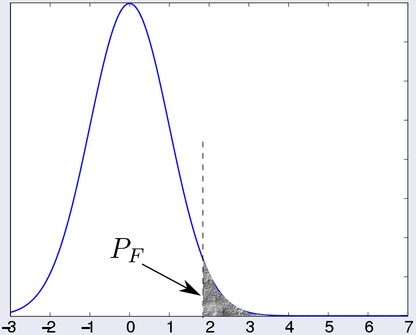
**Доказано, что при использовании метода максимального правдоподобия вероятность правильного обнаружения всегда максимизируется.**



# Критерий Неймана-Пирсона

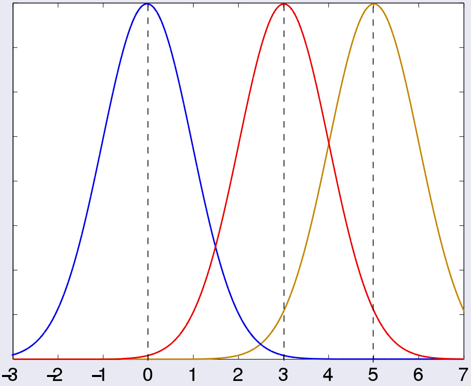
## Важно то, что величина порога не зависит от сигнала!

$$\int_R^{+\infty} C \cdot exp\left\{-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=0}^{N}\left(y_{k,i} - 0 \cdot s_{k,i}\right)^2\right\} = P_{F0}$$



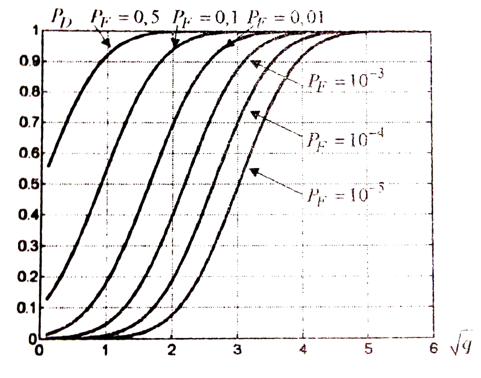
# Критерий Неймана-Пирсона

## Как добиться высокой вероятности правильного обнаружения?



# Критерий Неймана-Пирсона

## Статистические характеристики обнаружения



# Обнаружение сигнала с неизвестной фазой

## Обычно фаза сигнала неизвестна

$$y_{k,i} = AG_{\text{ДК}}(t_{k,i} - \tau)cos\left(\omega t_{k,i} + \varphi_k\right) + n_{k,i},$$

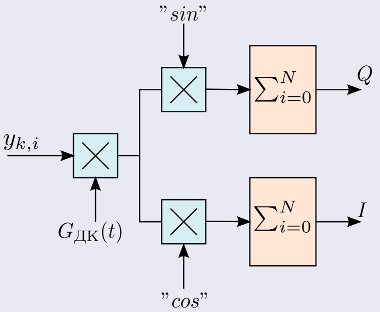
## При неизвестной фазе используется *квадратурное накопление*

$$s_{\text{оп},c}(t_{k,i}) = AG_{\text{ДК}}(t_{k,i} - \tau_k)cos(\omega t_{k,i}),$$

$$s_{\text{оп},s}(t_{k,i}) = AG_{\text{ДК}}(t_{k,i} - \tau_k)sin(\omega t_{k,i}).$$

# Обнаружение сигнала с неизвестной фазой

**Накапливаются два корреляционных интеграла, каждый со своим опорным сигналом:**



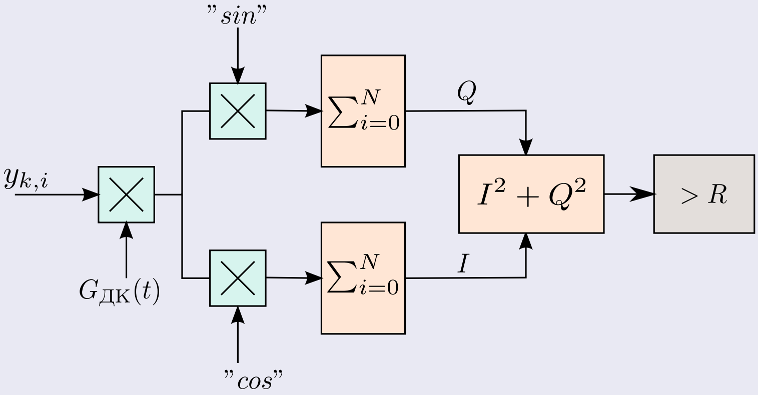

$$I = \sum_{i=0}^{N} y_{k,i} \cdot s_{\text{оп},c}(t_{k,i})$$

$$Q = \sum_{i=0}^{N} y_{k,i} \cdot s_{\text{оп},s}(t_{k,i})$$

# Обнаружение сигнала с неизвестной фазой

## Решающее правило имеет вид

$$I^2 + Q^2 > R.$$



# Некогерентное накопление

## В ряде случаев нежелательно увеличивать длительность интервала накопления в корреляторе

$$I = \sum_{i=0}^{N} y_{k,i} \cdot s_{\text{оп},c}(t_{k,i})$$

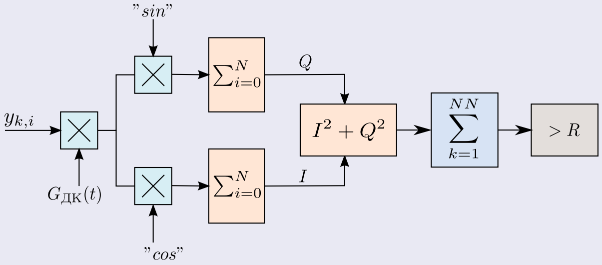
Пример: длительность интервала накопления не должна быть больше длительности символа навигационного сообщения.

$$T = 20 \text{ мс}, \; P_F = 0.1, \; P_D = 0.9 \; \Rightarrow q_{min} = 32 \text{ дБГц}$$

# Некогерентное накопление

## Некогерентное накопление:

$$\sum_{k=1}^{NN} I_k^2 + Q_k^2 > R.$$



# Некогерентное накопление

**Эффективность когерентного и некогерентного накопления разная:**

- увеличение в 2 раза $T$ даёт выигрыш 3 дБ;
- увеличение в 2 раза $NN$ даёт выигрыш 2 дБ.

# Некогерентное накопление

## Пример

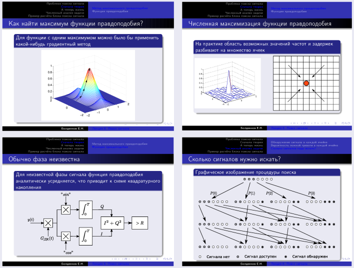
Допустим, на выходе накопителя должно быть 10 дБ. Если на входе 40 дБГц, то надо $T = 1$ мс, $NN = 1$.

## Предположим, нужно обеспечить то же самое при 34 дБГц.

- можно увеличить когерентное накопление в два раза $T = 4$ мс, $NN = 1$
- можно увеличить некогерентное накопление в четыре раза $T = 1$ мс, $NN = 8$

# Следующая лекция

## Тема следующей лекции - поиск сигнала




## Посетите наш web-сайт

http://srns.ru